中線定理が成立するノルム空間と内積空間

ゐぶ

1　はじめに

中線定理が成立するノルム空間から自然に内積空間を定義できる. 逆に, 内積空間から自然にノルム空間を定義することができる. これを証明し, 最後にこの事実を圏論を用いて述べる.

2　ノルム空間と内積空間

Definition 2.1 (ノルム空間)

$\mathbf{C}$ 上の線型空間 X の各元 x に対し, 実数 $\|x\|$ が定まり,
(I) $\forall x \in X,\ \|x\| \geq 0.$
(II) $\forall x \in X,\ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
(III) $\forall c \in \mathbf{C},\ \forall x \in X,\ \|cx\| = c\|x\|.$
(IV) $\forall x, y \in X,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$
を満たすとき, X はノルム空間といい, $\|x\|$ は x のノルムという.

Definition 2.2 (有界線型作用素)

X, Y をノルム空間とする. 作用素 $T\colon X \to Y$ が,
(I) $\forall x, y \in X,\ T(x + y) = Tx + Ty.$
(II) $\forall c \in \mathbf{C},\ \forall x \in X,\ T(cx) = cTx.$
(III) $\exists M \geq 0\ s.t.\ \forall x \in X,\ \|Tx\| \leq M\|x\|.$
を満たすとき, 有界線型作用素という.

X をノルム空間とする. このとき,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

を中線定理という.

Definition 2.3 (内積空間)

$\mathbf{C}$ 上の線型空間 X の任意の 2 元 x, y に対し, 複素数 $\langle x, y\rangle$ が定まり,
(I) $\forall x \in X,\ \langle x, x\rangle \geq 0.$
(II) $\forall x \in X,\ \langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
(III) $\forall x, y \in X,\ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}.$
(IV) $\forall x, y, z \in X,\ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$

(V) $\forall c \in \mathbf{C},\ \forall x, y \in X,\ \langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$.
を満たすとき, X は内積空間または前ヒルベルト空間といい, $\langle x, y\rangle$ は x と y の内積という.

3　内積からノルム

Lemma 3.1 (シュワルツの不等式)

X を内積空間とする. このとき, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ とおくと,

$$\forall x, y \in X,\ |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

が成立する.

Proof
任意 $x, y \in X$ に対し, $\langle x, y\rangle = \alpha$ とおく. $\alpha = 0$ のときは両辺が 0 であるため成立する.
次に $\alpha \neq 0$ のときを示す.

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbf{R},\ 0 &\leq \langle tx + \alpha y, tx + \alpha y\rangle \\ &= t^2\langle x, x\rangle + t\overline{\alpha}\langle x, y\rangle + t\alpha\langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y, y\rangle \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t|\alpha|^2 + |\alpha|^2\|y\|^2\end{aligned}$$

が成立するため, 判別式を考えると,

$$|\alpha|^4 - |\alpha|^2\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

となり, $|\alpha| \neq 0$ より,

$$|\alpha| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

が成立する. □

Theorem 3.2

内積空間 X は, ノルム $\|X\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ によってノルム空間になる. また内積はこのノルムを用いて,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

と表せる.

Proof
まず, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ がノルムであることを示す.

$$\forall x \in X,\ \langle x, x\rangle \geq 0$$

より,

$$\forall x \in X,\ \|x\| \geq 0$$

が成立する. また,

$$\forall x \in X,\ \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

より,

$$\forall x \in X,\ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

が成立する.

$$\forall \alpha \in \mathbf{C},\ \forall x \in X,\ \|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x \rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha|\|x\|$$

が成立し, **Lemma 3.1** より,

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in X,\ \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\
&\leq 2\langle x, y \rangle \\
&\leq 2\|x\|\|y\| \\
&\leq (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

となるため,

$$\forall x, y \in X,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

が成立する. したがって, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ はノルムである.
また,

$$\forall x, y \in X,\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle = 4\mathrm{Re}\langle x, y \rangle$$

と

$$\forall x, y \in X,\ \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = \langle x+iy, x+iy \rangle - \langle x-iy, x-iy \rangle = 4\mathrm{Re}\langle x, iy \rangle = 4\mathrm{Re}(-i\langle x, y \rangle) = 4\mathrm{Im}\langle x, y \rangle$$

より,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

が成立する. □

4 ノルムから内積

Theorem 4.1

X をノルム空間とする. このとき, 以下は同値である.
(I) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ となるような内積 $\langle x, y \rangle$ が存在する.
(II) 中線定理

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

が成立する.

Proof

(I)$\Longrightarrow$(II) を示す.
内積の計算により,

$$\forall x, y \in X,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

が成立する. つまり, 中線定理が成立する.
次に (II)$\Longrightarrow$(I) を示す.

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

が $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ を満たす内積であることを示す.

$$\forall x \in X,\ \langle x,x\rangle = \frac{1}{4}(2\|x\|^2 + i\|x+ix\|^2 - i\|x-ix\|^2) = \frac{1}{4}(2\|x\|^2 + i\|x+ix\|^2 - i\|i(ix+x)\|^2) = \|x\|^2$$

が成立する. つまり, $\langle x,y\rangle$ は $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ を満たす.
定義より明らかに,

$$\forall x \in X,\ \langle x,x\rangle \geq 0$$

と

$$\forall x \in X,\ \langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

が成立する. また,

$$\forall x, y \in X,\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 - i\|-i(y+ix)\|^2 + i\|i(y-ix)\|^2) = \overline{\langle y,x\rangle}$$

が成立する. 中線定理より,

$$\begin{aligned}
\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle &= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + i\|x+iz\|^2 - i\|x-iz\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z)\|^2 + i\|y+iz\|^2 - i\|y-iz\|^2) \\
&= \frac{1}{8}(\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2 - \|x+y-2z\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+y+2iz\|^2 + i\|x-y\|^2 - i\|x+y-2iz\|^2 - i\|x-y\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\langle x+y, 2z\rangle
\end{aligned}$$

が成立する. ここで $\langle 0,z\rangle = 0$ であるため, $y = 0$ と考えると, $\langle x,z\rangle = \frac{1}{2}\langle x, 2z\rangle$ となる.
よって, $\langle x+y, z\rangle = \frac{1}{2}\langle x+y, 2z\rangle$ が成立する. したがって,

$$\forall x, y, z \in X,\ \langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$$

が成立する.
上記の議論により,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x, y \in X,\ \langle nx, y\rangle = n\langle x,y\rangle$$

が成立する. ここで $n\langle \frac{1}{n}x, y\rangle = \langle x,y\rangle$ であるため, $\langle \frac{1}{n}x, y\rangle = \frac{1}{n}\langle x,y\rangle$ が成立する.
また, $\langle x,y\rangle + \langle -x,y\rangle = \langle 0,y\rangle = 0$ より, $\langle -x,y\rangle = -\langle x,y\rangle$ が成立する. したがって,

$$\forall q \in \mathbf{Q},\ \forall x, y \in X,\ \langle qx, y\rangle = q\langle x,y\rangle$$

が成立する. $r \in \mathbf{R}$ に関して $\langle rx, y\rangle$ は連続なので, r に収束する有理数列 $\{q_n\}$ をとると,

$$\forall x, y \in X,\ \langle rx, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle q_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} q_n\langle x, y\rangle = r\langle x, y\rangle$$

となるため,

$$\forall r \in \mathbf{R},\ \forall x, y \in X,\ \langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$$

が成立する.

$$\begin{aligned}\forall x, y \in X,\ \langle ix, y\rangle &= \frac{1}{4}(\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2 + i\|ix+iy\|^2 - i\|ix-iy\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x-iy\|^2 - \|x-iy\|^2 + i\|x+y\|^2 - i\|x-y\|^2) \\ &= i\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

となるため,

$$\forall \alpha \in \mathbf{C},\ \forall x, y \in X,\ \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$$

が成立する.

したがって, $\langle x, y\rangle$ は $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ を満たす内積である. □

5　圏論的思考

中線定理が成立するノルム空間を対象とし, 有界線型作用素を射とするような圏を **PaNor** と表し, 内積空間を対象とし, 有界線型作用素を射とするような圏を **PreHill** と表すことにする. **Theorem 3.2** より関手 **PreHill**→**PaNor** が定義され, **Theorem 4.1** より関手 **PaNor**→**PreHill** が定義される. その構成より **PaNor** と **PreHill** は圏同型であることがわかる.

6　おわりに

関数解析の結果を圏論の言葉を使って述べることができた.

参考文献

[1]　前田 周一郎 (著)・「函数解析」・森北出版・2007